Spektraldarstellung von Signalen

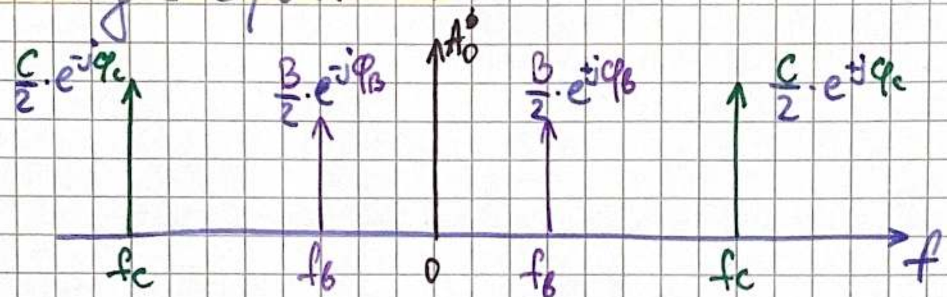
Linearkombination von Sinussignalen

$$\boxed{s(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\{X_k \cdot e^{j\omega_k t}\} = X_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k)}$$

Gleichanteil (X_0) — Kreisfrequenzen (ω_k)

Grundkreisfreq. $\boxed{\omega_T = \mathrm{ggT}(\omega_1, \dots \omega_N)}$

Zweiseitiges Spektrum



$$s(t) = A_0 + B \cdot \cos(2\pi f_B t + \varphi_B) + C \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

$$s(t) = A_0 + \frac{B}{2}\left(e^{+j(2\pi f_B t + \varphi_B)} + e^{-j(2\pi f_B t + \varphi_B)}\right) + \frac{C}{2}\left(e^{+j(2\pi f_c t + \varphi_c)} + e^{-j(2\pi f_c t + \varphi_c)}\right)$$

(reelles Signal): Spektrum symmetrisch: $\boxed{a_{-k} = a_k^*}$

Def. periodisches Signal $s(t)$ mit Periode T

- $t \in \mathcal{D}(s) \Leftrightarrow t + T \in \mathcal{D}(s)$
- $s(t+T) = s(t) \quad \forall t \in \mathcal{D}(s)$

Fourier-Reihen

S:3

- jedes periodische Signal als Summe von Sinussignalen

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j\underbrace{\omega_T k}t}} \quad \in \mathbb{R}$$

Vielfache der Grundkreisfreq.

Fourier-Analyse

s(t) gegeben, wir bestimmen a_k's

- Mittelwert / Gleichanteil ($k=0$)

$$\boxed{a_0 = \int_0^T s(t)\, dt}$$

- Koeffizienten ($k \neq 0$)

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_0^T s(t) \cdot e^{-j\omega_T k t}\, dt}$$

$$\left(\rightarrow (s_1, s_2) = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2^*(t)\, dt = 0\right)$$

(orthogonale Fkts)

Tipps

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\pi k) = 0 \\ \cos(\pi k) = e^{j\pi k} = (-1)^k \\ e^{j2\pi k} = k \\ e^{\pm j\pi/2 k} = (\pm j)^k \end{array}\right\} \forall k \in \mathbb{Z}$$

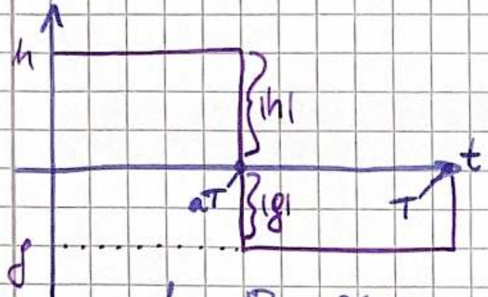
Substitution: $\boxed{\alpha := -j\omega_T k}$ $\Rightarrow e^{-j\omega_T k t} = e^{\alpha t}$

ungerade Fkt s(t) → komplexe Koeffizienten

gerade Fkt s(t) → reelle Koeffizienten

Tipps zu Fourier-Reihen

Allg. Rechtecksignal



$h, g \in \mathbb{R} \quad 0 \leq a \leq 1$

$a_0 = \frac{1}{T}(h \cdot a \cdot T + g(T - aT))$

$$\boxed{a_0 = (h-g) \cdot a + g}$$

$$\boxed{a_k = \frac{h-g}{j \cdot 2\pi k} \cdot \left(1 - e^{-j2\pi ak}\right)}$$

Integrale

$$\boxed{\int e^{\alpha t}\, dt = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}}$$

$$\boxed{\int t \cdot e^{\alpha t}\, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2}(\alpha t - 1)}$$

$$\boxed{\int t^2 \cdot e^{\alpha t}\, dt = e^{\alpha t} \cdot \left(\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}\right)}$$

$$\boxed{\int e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t)\, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\alpha \cdot \sin(\beta t) - \beta \cdot \cos(\beta t)\right)}$$

oder: $\cos(\beta t)$ $\qquad$ $\cos(\beta t)$ $\qquad$ $\sin(\beta t)$

Fourier-Reihen – Übung

S.3

periodisches Signal $\boxed{s(t) = s(t+kT)}$ T = Periodendauer, $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j\omega_T k t}}$$

$$\boxed{\omega_T = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot F}$$

(F: Grundfrequenz)

→ Überlagerung von gewichteten Sinusfkts

Synthese

Bsp.: $\cos(\omega_T t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_T k t} = \frac{1}{2} e^{j\omega_T t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_T t}$

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{2}$ für $k = \pm 1$, $a_k = 0$ sonst

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-j\omega_T k t}\, dt}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)\, dt}$$

(a_0:) Gleichanteil (separat betrachten)

Fourier-Reihenanalyse für $s(t)$

$\boxed{s(t) \text{ reell} \Rightarrow a_k = a_{-k}^*}$ (symmetrisches Spektrum)

Summe von (periodischen) sin-Fkts ist ebenfalls periodisch, wenn die Frequenzen der Signale ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind.

Schwebung

$$2\cos(\omega_\Delta t) \cdot \sin(\omega_M t) = \cancel{2} \cdot \frac{e^{j\omega_\Delta t} + e^{-j\omega_\Delta t}}{\cancel{2}} \cdot \frac{e^{j\omega_M t} - e^{-j\omega_M t}}{2j}$$

$(\omega_M > \omega_\Delta)$

$$= \frac{1}{2j}\Big(e^{j\underbrace{(\omega_\Delta + \omega_M)}_{\omega_2} t} - e^{j\underbrace{(\omega_\Delta - \omega_M)}_{-\omega_1} t} + e^{-j\underbrace{(\omega_\Delta - \omega_M)}_{-\omega_1} t} - e^{-j\underbrace{(\omega_\Delta + \omega_M)}_{\omega_2} t}\Big)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_2 t} - e^{-j\omega_2 t} + e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}\right)$$

$$= \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_1 t)$$

→ Trägersignal → Mittelfrequenz → $\boxed{\omega_M = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}$

→ Einhüllende → $\boxed{\omega_\Delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$